

実践報告

論理的思考力や数学的表現力を育む授業づくりについて
－ 1 年数学科「球の体積」の授業分析を通して－

山口 高司*

About Math Classes to Develop Student's Logical Thinking and Mathematical Expressions:

－ 7th Grade Math through a Class Analysis of the Volume of a Sphere－

Takashi YAMAGUCHI*

【要約】

論理的思考力や数学的表現力を育むために、操作や実験などの活動から図形の性質を見つけさせる活動を通して、図形の性質が成り立つ理由を考えさせたり、条件を変えて考えさせたり一般化させたりする。また、グループ活動を積極的に取り入れ、図などを用いながら自分の考えを説明させることで、数学的コミュニケーション力を高めさせることを重視した。

【キーワード】

操作や実験などの活動、 数学的コミュニケーション力

1 はじめに

平成20年3月に示された新学習指導要領では、中学校数学科の目標に「数学的活動を通して」と「表現する能力」が加えられている。つまり、数学的な思考力・判断力・表現力を育むために、数学的活動を一層充実させることと、事象を数理的に考察し表現する能力を高めさせることが、今回の改訂で重視されていることである。

また、本校数学科では、小・中が連携しながら論理的思考力や数学的な表現力を育む授業づくりを探究し、児童生徒が「考える楽しさ」や「わかる喜び」を実感できるような授業を目指して研究を進めている。授業において、課題を解決し答えを求めることは大事なことだが、その答えに至るまでの過程も重要である。生徒に考える楽しさを味わわせるためには、課題解決の過程において、まず生徒に考えさせる場があることが大切で、生徒が自ら考えてみたくなるような状況を生み出すべきであると考え。また、生徒にわかる喜びを実感させるためには、「なぜなのか」「どうしてなのか」「さらにどうなるか」を突き詰めながら筋道を立てて論理的に考えさせることが大切である。

そこで、論理的思考力や数学的表現力を育むために、図形領域において、操作や実験などの活動から図形の性質を見つけさせる活動を通して、図形の性質が成り立つ理由を考えさせたり、図形の性質を利用して条件を変えて考えさせたり一般化させたりする。また、グループ活動を積極的に取り入れ、図などを用いながら自分の考えを説明させることで、数学的コミュニケーション力を高めさせることを重視していきたい。

* 佐賀大学文化教育学部附属中学校

2 単元の目標と内容

(1) 生徒の実態

本学級の生徒は、計算問題は正確に素早く解くことができ、思考を問うような問題もよく考え、解決することができる。しかし、図形領域においては、図形の性質を直観的に見つけることはできるものの、図形の性質がなぜ成り立つのか理由をきちんと説明できない生徒が多い。また、公式を利用して課題を解決することを好み、図形の性質が成り立つ理由を考えたがらない生徒も多くみられる。さらに、図形の性質を利用して、条件を変えて考えたり一般化したりすることを苦手とする生徒も多い。

そこで、本単元では、義務教育9年間をつなぐ「学力デザイン」にも示しているように、図形の性質が成り立つ理由を述べたり、条件を変えて考えたり、一般化したりする活動や単元末レポートの作成を重視していきたい。また、操作や実験などの活動を積極的に取り入れることで、「考える楽しさ」を味わわせるとともに、図形の性質が成り立つ理由に興味をもたせたい。

(2) 単元名「空間図形」～球の体積～

(3) 単元の概要

小学校では、操作的な活動や直観的な取り扱いを中心として、図形についての感覚を育てる。それに対して中学校では、操作や実験などの活動を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、図形の性質が成り立つ理由を論理的に考察し表現する能力を培うことをねらいとする。

また、附属小算数科と本校数学科においては、児童生徒が論理的思考力や数学的な表現力を育む授業づくりを目指し、小・中で連携して研究を行っている。さらに、本校数学科では、思考の段階で、「なぜ」「どうして」「さらには」と突き詰めながら筋道を立てて論理的に考えさせるようにしている。

そこで本単元では、単元を貫く問いを「空間図形の特徴や性質から見えてくるものは」とし、操作や実験などの活動から図形の性質を見つけさせる活動を通して、図形の性質が成り立つ理由を考えさせたり、図形の性質を利用して条件を変えて考えさせたり一般化させたりしていきたい。また、グループ活動を積極的に取り入れ、図などを用いながら自分の考えを説明させることで、数学的コミュニケーション力を高めさせていきたい。

3 授業の実際

本時の授業は以下のように行った。

(1) 本時の指導目標

球と円柱、円錐の体積の関係を見つけさせる。次に、球の体積を求める式($\frac{4}{3}\pi r^3$)を導かせる。

(2) 本時の評価規準

ア 球の体積を求める式を導き、なぜそうなるのか理由を述べることができる。

イ 球と円柱、円錐の体積を比較することで、その関係を見つけることができる。

(3) 本時に期待する生徒の学び

グループ活動で自分の考えを説明したり、他の人の考えを理解したりすることで、思考の広がりや深まりをもつことができる。

(4) 本時の授業過程【全18時間 本時13／18】

表1に本時の授業過程を示す。

表 1 本時の授業過程

過程	学習活動と内容	形態	教師の指導・支援	評価とその方法
導入	1 円柱と円錐の関係を確認する。 その後、本時は球と円柱、円錐の体積の関係を調べることを知る。	斉	1 円柱、円錐の高さや、底面の半径の長さを確認させる。	
	課題 1 : 球と円柱、円錐の体積の関係を調べよう。			
展開	2 球と円柱、円錐の体積の関係を予想する。	斉	2 ワークシートに予想を書かせる。	イ 球と円柱、円錐の体積を比較することで、その関係を見つけることができる。 (ワークシート、観察)
	3 球と円柱、円錐の体積の関係について実験を行い、これらの体積の関係を調べる。 ・球は、円柱の $\frac{2}{3}$ 倍 ・球は、円錐の 2 倍 ・円柱 = 円錐 + 球	G 斉	3 実験の道具を渡す前に、次のことを説明する。 ・球は半球を利用する。 ・班で見つけた体積の関係は、ワークシートに記録する。 ・主語をはっきりさせる。	
	4 球と円柱、円錐の体積の関係について、班の考えを発表する。	斉	4 他班の考えと比較しながら体積の関係を確認させる。	
	課題 2 : 球と円柱、円錐の体積の関係から、球の体積を求める式を考えよう。			
	5 球と円柱、円錐の体積の関係をを利用して、球の体積を求める式を導く。	G	5 班で誰がどの関係を使って球の体積を求めるのかを決め、考えさせる。解決したら、班で互いに説明させる。	
展望	6 球の体積を求める式についてどのように考えて式を導いたか発表する。	斉	6 発表する際、図を使いながら説明するように伝える。また、発表後、どの式も同じ式になることを確認させる。	ア 球の体積を求める式を導き、なぜそうなるのか理由を述べることができる。 (ワークシート)
	7 本時の学習内容を振り返る。	個	7 自分の言葉で書かせる。	
	8 次時の予告をする。	斉	8 次時は、本授業と別の方法で球の体積を考えることを伝える。	

(5) 授業の導入について

球と円柱、円錐の体積の関係を調べ、その関係から球の体積を求めさせるために、図 2 のような実験道具を使って考えさせた。比較するためには条件をそろえておく必要があり、どの立体も半径はすべて等しく、円柱と円錐の高さは球の半径の 2 倍であることを確認した。

- ・球 (半径 3 cm)
- ・円柱 (底面の円の半径は球の半径と等しく、高さは球の半径の 2 倍になっているもの)
- ・円錐 (底面の円の半径は球の半径と等しく、高さは球の半径の 2 倍になっているもの)
- ・塩
- ・スプーン 2 本
- ・ケース 1 箱

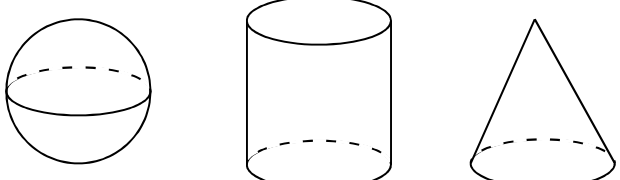


図 2 実験道具

4 論理的思考力や数学的な表現力についての考察

操作や実験などの活動から図形の性質を見つけさせる活動を取り入れたことで、図形の性質が成り立つ理由を考えたり、図などを用いながら自分の考えを相手に説明したりする力が身についたか考察する。ここでは、生徒のワークシートや授業での発表の様子から、考察していく。

(1) 課題1に対する取り組みの様子

課題1では、次のような課題に取り組んだ。

【課題1】

球と円柱、円錐の体積の関係を調べよう。

全体的には、まず半球を使って、円柱に塩を入れていくと、3回でいっぱいになると考えた班が多かった。そこから、球と円柱の体積の関係が2:3になることを発見していた。また、円錐は半球1杯分であったので、円錐と球の体積の関係は1:2であることを発見していた

(図3)。他にも、円錐と球の体積を合わせると円柱の体積と等しくなることを、実験から見つけ出した班もあった。また、全体で班の実験結果を共有し、実験から分かった球と円柱、円錐の体積の関係を整理する中で、これら3つの立体の体積の関係は、円錐:球:円柱=1:2:3になることを導くことができていた(図4)。どの班も実験の活動に意欲的に取り組んでいる様子が見られ(図5)、球と円柱、円錐の体積の関係を見つけ出すことができていた。

ただ、実験では誤差があり、例えば、半球を使って円柱に塩を入れていくと3.5杯分になったとか、逆に初めに円柱の方に塩を入れてから半球との関係を調べようとしたために関係をうまく導けなかったといった班もあった。実験結果を共有する場面で、各班の実験結果を互いに比較しながら、球と円柱、円錐の関係を導いていくようにすればよかったと思う。いくつかの班の実験結果だけから関係を結論付けるのではなく、すべての班の実験結果を比較しながら結論を導き出すことで、実感を伴った納得を得られたかもしれない。

また、説明をする際、図を使わずに説明したため、体積の関係がうまく伝わらなかったり、逆になったりすることがあった。主語をはっきりさせ、図を使いながら、1つ1つ丁寧に体積の関係を確認させていくべきだった。

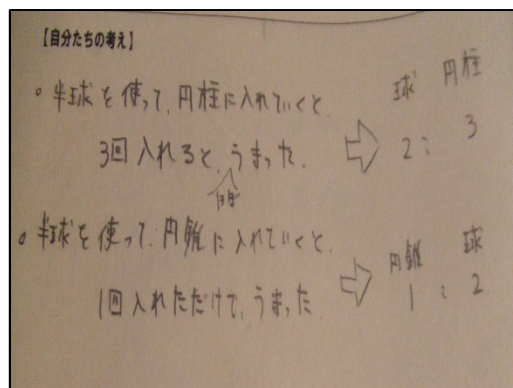


図3 実験結果

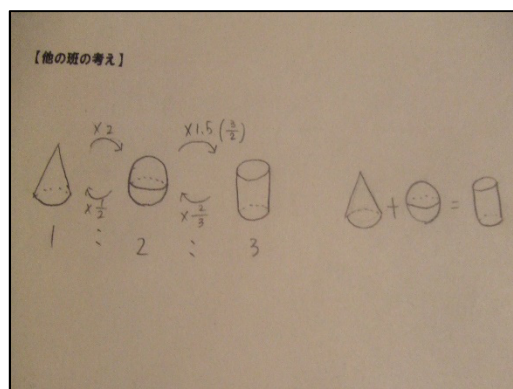


図4 球と円柱、円錐の体積の関係



図5 実験の様子

(2) 課題2に対する取り組みの様子

課題2では、次のような課題に取り組んだ。

【課題2】

球と円柱、円錐の体積の関係から、球の体積を求める式を考えよう。

球の半径を r cm とするとき、球の体積を求める式は
 どうなるか考えさせた。このとき、円柱や円錐の高さ
 は $2r$ となる。全体的には、球と円柱の体積の関係を
 使って球の体積を求める式を考えている生徒が多かつ
 た。まず、円柱の体積を求める式は、底面積 \times 高さな
 ので、 $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$ となる。次に、球は円柱
 の $2/3$ 倍であることから、球の体積を求める式が $4/3\pi r^3$
 であることを導いていた (図6)。

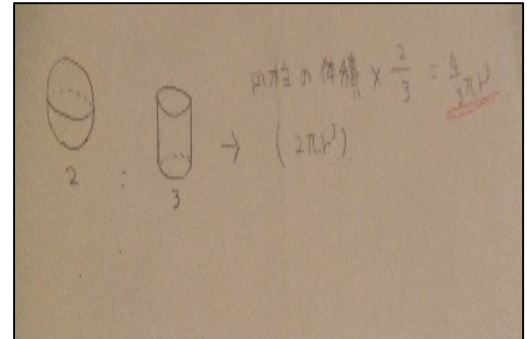


図6 球と円柱の関係から

球と円錐の関係では、円錐の体積を求める式は、底
 面積 \times 高さ $\times 1/3$ なので、 $\pi r^2 \times 2r \times 1/3 = 2/3\pi r^3$
 となる。次に、球は円錐の2倍であるこ
 とから、球の体積を求める式を導いていた (図7)。

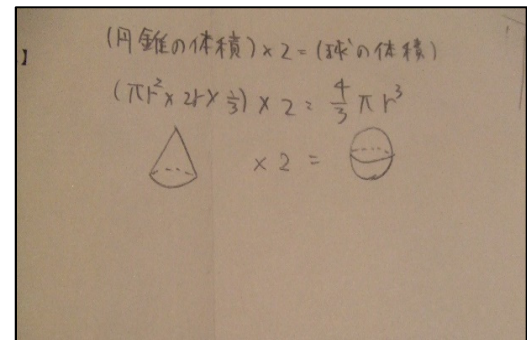


図7 球と円錐の関係から

他にも、球の体積は円柱から円錐の体積をひいたも
 のであるということから、球の体積を求める式を導い
 ているものもあった (図8)。文字を使って説明する場
 面であったが、全体的には、それぞれの立体の体積を
 文字を使って表し、課題1の実験で分かった関係を使っ
 て球の体積を求める式を導くことができていた。

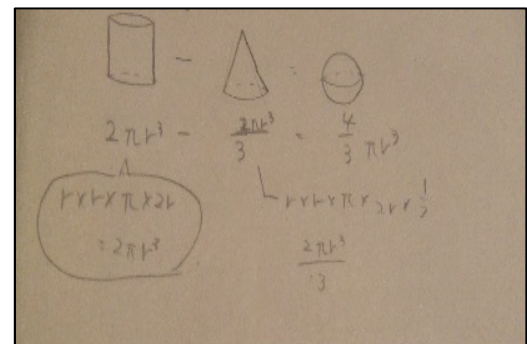


図8 球=円柱-円錐の関係から

発表場面でも、図を使いながら体積の関係を示し、
 その関係から球の体積を求める式をどう導くのかをみ
 んなに分かりやすく説明できていた。

全体で考えを深める場面では、それぞれの考え方を
 見比べたところ、どの関係を用いても、球の体積を求
 める式はすべて $4/3\pi r^3$ になったことから、球の
 体積を求める式について納得したという生徒が多くい
 た。

授業は以上のような流れであったが、高さも r cm
 となる円錐を利用してみるのもよいと思う。高さも
 r cm の円錐を利用する場合、その円錐の体積を求め
 る式は $1/3\pi r^3$ となる。球の体積は、この円錐の
 4倍であるので、球の体積は $4/3\pi r^3$ となる。こ
 の考え方も、スムーズにいくのではないと思う (図
 9)。

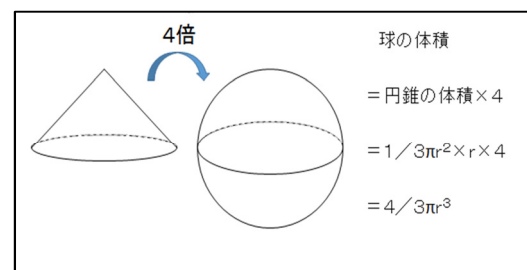


図9 高さも r cm の円錐の利用

また、球の体積を求める式を導く考え方として、図10のように、球を角錐に分割して求める方法がある。これらの角錐の高さは、すべて球の半径 r cm になるので、これらの角錐の体積の和は $1/3 \times \text{球の表面積} \times r$ となり、球の体積は $1/3 \times 4\pi r^2 \times r = 4/3\pi r^3$ であることが導かれる。

このように、違った角度から成り立つ事象を考えることは、学びをさらに深めることにつながると思う。

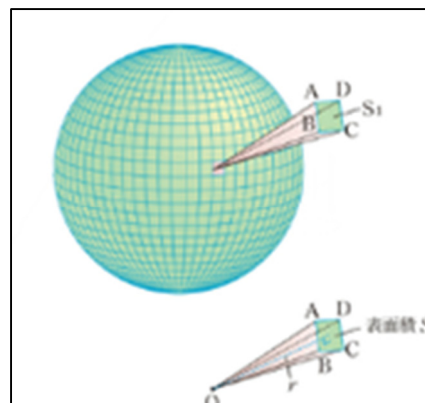


図10 球は角錐の集まり

5. おわりに

論理的思考力や数学的表現力を育むために、操作や実験などの活動から図形の性質を見つけさせる活動を通して、図形の性質が成り立つ理由を考えさせたり、図形の性質を利用して考えさせたり、一般化させたりすることができた。また、グループ活動を積極的に取り入れ、図などを用いながら自分の考えを説明させることで、多様な考え方を共有することができ、生徒に数学的思考力や数学的な表現力を身につけさせることができた。

今後の課題として、児童生徒が課題を楽しんで考えたり、わかる喜びを感じたりできるような教材の開発を今後も積極的に行っていきたい。また、論理的思考力や数学的な表現力の高まりを目指し、「さらにどうなるか」と発展的に考えさせるような授業を仕組んでいく必要がある。

【参考文献】

- 西岡加名恵編著『「逆引き設計」で確かな学力を保障する』明治図書 2008.
文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版 2008.